UNIVERSITÉ ABDELMALEK ESSAADI
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
TÉTOUAN

COURS

ANALYSE II

ARIJ BOUZELMATE

Filières : **SMP/SMC**

Année Universitaire : **2015-2016**

Table des matières

Préface

Ce polycopié est destiné aux étudiants des deux filières Sciences de la Matière Physique (SMP) et Sciences de la Matière Chimie (SMC). Il regroupe les notions essentielles du cours d'Analyse II. Il est rédigé à l'intention des intéressés qui veulent avoir un document de base pour compléter le cours magistral.

J'ai essayé de présenter le cours d'une manière assez simple. Chaque chapitre est illustré par des exemples et des exercices qui constituent une application directe des résultats fondamentaux abordés.

J'estime que ce polycopié aura rempli sa mission, s'il donne l'envie aux étudiants de consulter d'autres livres et les aide à faire des exercices, car la résolution des exercices va leur permettre de vérifier s'ils ont bien assimilé le cours et c'est à partir de l'exercice qu'émerge le savoir mathématique.

Le cours est divisé en cinq chapitres.

Dans le premier chapitre, nous étudions les séries numériques et nous présentons les principaux critères de leur convergence.

Le deuxième chapitre comporte l'étude des primitives et des intégrales simples ainsi que les différentes techniques du calcul intégral.

Le troisième chapitre permet d'étendre la notion de l'intégrale simple à celle de l'intégrale généralisée qui n'est autre que la limite d'une intégrale définie.

Les deux derniers chapitres portent sur l'étude des équations différentielles du premier ordre et celles du second ordre qui sont linéaires à coefficients constants.

Bonne Lecture
Arij Bouzelmate

Chapitre 1

Séries Numériques

1 Définition

Définition 1.1. *Soit* $(u_n)_n$ *une suite de nombres réels.*

On appelle série de terme général u_n *notée par* $\sum_{n\geq 0} u_n$*, la suite numérique* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *où*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

S_n *s'appelle la somme partielle de rang* n *de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Remarque 1.1. *On a* $u_n = S_n - S_{n-1}$.

2 Convergence - Divergence

Définition 2.1. *On dit que la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers une limite finie* S *quand* n *tend vers* $+\infty$.

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = S.$$

S *est appelée la somme de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et on note* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *est appelé reste d'ordre* n *de la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$. *Dans le cas de convergence,* $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est divergente si* S *est infini ou si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

Remarque 2.1. *Etudier la nature d'une série revient à étudier sa convergence ou sa divergence.*

Exemple 2.1. *La série géométrique.*

La série numérique de la forme $\sum_{n\geq 0} a^n$ *est une série géométrique. Sa somme partielle de rang* n *est :*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}, & si\ a \neq 1, \\ n+1, & si\ a = 1. \end{cases}$$

La série $\sum_{n\geq 0} a^n$ *est convergente si* $|a| < 1$ *et a pour somme* $\dfrac{1}{1-a}$.
La série $\sum_{n\geq 0} a^n$ *est divergente si* $|a| \geq 1$.

Proposition 2.2. *La nature d'une série ne change pas par modification d'un nombre fini de ses termes.*

Proposition 2.3. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont deux séries convergentes et si* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors la série* $\sum_{n\geq 0} \Big(\lambda u_n + v_n\Big)$ *est convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\lambda u_n + v_n\Big) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Remarque 2.2. *On a :*

(i) *Si* $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} \lambda u_n$ *sont de même nature.*

(ii) *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ *sont de même nature.*

(iii) *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *divergent, on ne peut rien affirmer quant à la nature de* $\sum_{n\geq 0} (u_n + v_n)$ *comme le prouvent les exemples où* $v_n = -u_n$ *d'une part et* $v_n = u_n$ *d'autre part.*

Théorème 2.3. *(Condition nécessaire de convergence).*

Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Lorsque u_n *ne tend pas vers* 0, *on dit que* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge grossièrement.*

Preuve : La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n = S.$$

Il suffit donc de remarquer que $u_n = S_n - S_{n-1}$ converge vers 0 quand $n \to +\infty$. □

Remarque 2.4. *La réciproque du résultat précédent est fausse.*

Exemple 2.2. *Considérons la suite* $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ *mais la série* $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *n'est pas convergente car la somme partielle de rang* n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \sqrt{n+1}$$

tend vers $+\infty$ *quand* $n \to +\infty$.

3 Séries à Termes Positifs

3.1 Définition

Définition 3.1. *On dit q'une série* $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *est une série à termes positifs si et seulement si* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *On dit q'une série* $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ *est une série à termes positifs à partir d'un certain rang si et seulement si il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \geq N$.

Proposition 3.2. *Pour qu'une série de nombres réels positifs soit convergente, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles soit majorée.*

Preuve : C'est une conséquence du fait que toute suite croissante majorée est convergente.

En effet. Soient $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ une série numérique et $(S_n)_n$ sa somme partielle. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0.$$

Donc, la suite $(S_n)_n$ est croissante et comme elle est majorée, alors elle est convergente, c'est à dire, la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ est convergente. □

3.2 Principes de Comparaison

Proposition 3.3. *Soient* $\sum\limits_{n} u_n$ *et* $\sum\limits_{n} v_n$ *deux séries à termes positifs.*

(i) S'il existe $M > 0$ tel que $u_n \leq M\, v_n$ et $\sum_n v_n$ est convergente, alors $\sum_n u_n$ est convergente.

(ii) Si $u_n \sim v_n$ au voisinage de $+\infty$, alors $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ sont de même nature.

Exercice 3.4. *Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$.*

Solution : On pose $v_n = \frac{1}{n(n-1)}$, $n \geq 2$. Sa somme partielle définie par

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n},$$

est convergente vers 1 quand $n \to +\infty$. Ce qui veut dire que la série $\sum_n v_n$ est convergente.

Et comme

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = v_n \quad \text{pour tout } \ n \geq 2,$$

alors, d'après le principe de comparaison, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2}$ est convergente.

Exercice 3.5. *Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n - 1}{7^n + 4}$.*

Solution : On pose $u_n = \frac{3^n - 1}{7^n + 4}$, $n \geq 1$. On a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$ et $u_n \sim \left(\frac{3}{7}\right)^n$ au voisinage de $+\infty$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{7}\right)^n$ est une série géométrique convergente (car $\left|\frac{3}{7}\right| < 1$), alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

3.3 Critères de Convergence

Proposition 3.6. *(Règle de d'Alembert)*

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_n$ tende vers $l \in [0, +\infty]$. Alors,

(i) Si $l < 1$, la série $\sum_n u_n$ est convergente.

(ii) Si $l > 1$, la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exercice 3.7. *Etudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!}$, où a est un réel strictement positif fixé.*

Solution : On pose $u_n = \frac{a^n}{n!}$, $n \geq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0$, alors d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Proposition 3.8. *(Règle de Cauchy)*

Soit $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs telle que la suite* $(\sqrt[n]{u_n})_n$ *tende vers* $l \in [0, +\infty]$. *Alors,*

(i) *Si* $l < 1$, *la série* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

(ii) *Si* $l > 1$, *la série* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

Exercice 3.9. *Etudier la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$.

Solution : On pose $u_n = n^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}$, $n \geq 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$ et

$$\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n} = n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} = n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, alors d'après la règle de Cauchy, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

Remarque 3.1. *Dans les deux règles, si* $l = 1$, *on ne peut rien conclure.*

3.4 Exemple Fondamental : Séries de Riemann

Proposition 3.10. *La série de Riemann* $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.

Remarque 3.2. *La série* $\sum_n \frac{1}{n}$ *est appelée série harmonique. Elle est divergente.*

Proposition 3.11. *(Règle de Riemann)*

Soit $\sum_n u_n$ *une série à termes positifs.*

(i) *Si* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l$ *(finie) et* $\alpha > 1$, *alors la série* $\sum_n u_n$ *est convergente.*

(ii) *Si* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ *ou* $l \neq 0$ *et* $\alpha \leq 1$, *alors la série* $\sum_n u_n$ *est divergente.*

Exercice 3.12. *Etudier la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.

Solution : On pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^2}$, $n \geq 1$.

Soit $1 < \alpha < 2$, alors

$$\lim_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = \lim_{n \to +\infty} n^{\alpha-2} \ln(n) = 0.$$

Donc, d'après la règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

4 Séries à Termes de Signes Quelconques

4.1 Séries Absolument Convergentes

Définition 4.1. *Une série* $\sum_n u_n$ *est dite absolument convergente si et seulement si* $\sum_n |u_n|$ *est convergente.*

Théorème 4.1. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Exercice 4.2. *Etudier la nature de la série* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos n}{n^2}$.

Solution : On pose $u_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$, $n \geq 1$. Alors, pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme $\sum_n \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, alors d'après le principe de comparaison, la série $\sum_n |u_n|$ est convergente, càd $\sum_n u_n$ est absolument convergente. D'où, $\sum_n u_n$ est convergente.

Remarque 4.2. *La réciproque du théorème est fausse. Dans ce cas, une série convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Proposition 4.3. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, *alors la série* $\sum_n u_n$ *est absolument convergente.*

4.2 Séries Alternées

Définition 4.4. *La série* $\sum_n u_n$ *est dite alternée si le terme général* $u_n = (-1)^n\, a_n$ *avec* $a_n \geq 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 4.3. *(Condition Suffisante de Convergence : Critère spécial des séries alternées)*

Soit $\sum_{n}(-1)^n a_n$ *une série alternée.*

Si la suite $(a_n)_n$ *est décroissante et convergente vers* 0*, alors la série alternée* $\sum_{n}(-1)^n a_n$ *est convergente.*

Exercice 4.5. *Etudier la nature de la série alternée* $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$*, où* $\alpha > 0$.

Solution : On distingue deux cas.

• Si $\alpha > 1$. $\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente car c'est une série de Riemann $(\alpha > 1)$. Donc, $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est absolument convergente. Par suite, $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente.

• Si $0 < \alpha \leq 1$. $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente par application du critère spécial des séries alternées.

On déduit que la série alternée $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente pour tout $\alpha > 0$.

Chapitre 2

Intégrale Simple

1 Primitive d'une Fonction

Définition 1.1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.*

On appelle primitive de $f$sur I, toute fonction F définie sur I telle que F est dérivable et $F' = f$ sur I.

Exemple 1.1. *On a :*

$1-$ *La fonction* $x \to \ln|x|$ *est une primitive de la fonction* $x \to \dfrac{1}{x}$ *sur* $\mathbb{R}^*$.

$2-$ *La fonction* $x \to e^x$ *est une primitive de la fonction* $x \to e^x$ *sur* $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1. *(Existence des Primitives)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors,

(i) *f admet des primitives sur I.*

(ii) *Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors la fonction $F_1 - F_2$ est constante.*

2 Intégrale d'une Fonction Continue

Définition 2.1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $[a, b]$.*

On appelle intégrale de f de a à b, le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *défini par :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarque 2.1. *Le réel* $\int_a^b f(t)\,dt$ *ainsi défini ne dépend pas de la primitive choisie.*

Proposition 2.2. *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b]$. *Alors,*

(i) $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$

(ii) $\int_a^a f(t)\,dt = 0.$

3 Théorème Fondamental

Théorème 3.1. *(Théorème Fondamental de l'Analyse)*

Soient f *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et* $a \in I$. *Alors, la fonction* F *définie sur* I *par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I$$

est l'unique primitive de f *sur* I *qui s'annule en* a.

Remarque 3.2. *Une primitive de* f *sur* I *n'est pas nécessairement celle qui s'annule en un certain point, à titre d'exemple, la fonction exponentielle.*

4 Interprétation Géométrique

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

$1-$ Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ représente l'aire délimitée par l'axe des abscisses et la courbe C_f entre les abscisses a et b.

$2-$ Si f est de signe quelconque sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ représente la différence entre l'aire des domaines situés au dessus de l'axe des abscisses et en dessous de l'axe des abscisses.

5 Propriétés de l'Intégrale Simple

5.1 Linéarité

Proposition 5.1. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et α, β deux réels. Alors,*

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\ dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt.$$

5.2 Relation de Chasles

Proposition 5.2. *Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b, c des éléments de I. Alors,*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

Remarque 5.1. *Les réels a, b, c ne sont pas nécessairement rangés dans l'ordre croissant.*

Exercice 5.3. *Calculer $\displaystyle\int_{-2}^2 |t-1|\, dt$.*

Solution : En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 |t-1|\, dt &= \int_{-2}^1 |t-1|\, dt + \int_1^2 |t-1|\, dt \\ &= \int_{-2}^1 (1-t)\, dt + \int_1^2 (t-1)\, dt \\ &= \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{-2}^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^2 = 5. \end{aligned}$$

5.3 Intégrales et Inégalités

Proposition 5.4. *(Positivité de l'intégrale)*

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \geq 0$.

Proposition 5.5. *(Croissance de l'intégrale)*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq g(t)$. Alors,

$$\int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b g(t)\, dt.$$

Proposition 5.6. *(Inégalité de Schwarz)*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Alors

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

Proposition 5.7. *Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$.*

1. *Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$, alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$.*
2. *Si f n'est pas la fonction nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt > 0$.*

5.4 Inégalité de la Moyenne - Formules de la Moyenne

Proposition 5.8. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, il existe deux réels m et M tels que*

$$m \leq f(t) \leq M \quad \textit{pour tout } t \in [a,b]$$

et

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a).$$

Proposition 5.9. *(Inégalité de la moyenne)*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Proposition 5.10. *(Première formule de la moyenne)*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b-a).$$

Le nombre $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Proposition 5.11. *(Deuxième formule de la moyenne)*

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec g positive sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\int_a^b g(t)\,dt.$$

6 Sommes de Riemann

Théorème 6.1. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors, on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

En particulier, si f est continue sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)\,dt.$$

7 Calcul Intégral

7.1 Primitives des Fonctions Usuelles

1. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\ln|u|+cte.$
2. $\displaystyle\int u'(x)e^{u(x)}\,dx=e^u+cte.$
3. $\displaystyle\int u'(x)u^\alpha(x)\,dx=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+cte,\quad \alpha\neq-1.$
4. $\displaystyle\int u'(x)\cos(u(x))\,dx=\sin u+cte.$
5. $\displaystyle\int u'(x)\sin(u(x))\,dx=-\cos u+cte.$
6. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{1+u^2}\,dx=\arctan u+cte.$
7. $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}\,dx=\arcsin u+cte.$
8. $\displaystyle\int \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}\,dx=\arccos u+cte$

7.2 Intégration Par Changement de Variable

Théorème 7.1. *soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et soit $g:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ de classe C^1 avec $g(\alpha)=a$ et $g(\beta)=b$.*

Alors,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\Big(g(t)\Big)g'(t)\,dt.$$

La transformation $x = g(t)$ s'appelle changement de variable.

On effectue les trois substitutions suivantes :

(i) $x = g(t)$.

(ii) $dx = g'(t)dt$

(iii) On change les bornes d'intégration.

Exercice 7.1. *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt$.

Solution : On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin t}{\cos t} \, dt.$$

On pose $x = g(t) = \cos t$, et alors $dx = g'(t)\, dt = -\sin t \, dt$. D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt &= -\int_{g(0)}^{g\left(\frac{\pi}{4}\right)} \frac{dx}{x} \, dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{x} \, dx \\ &= -[\ln x]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

Proposition 7.2. *Soit* $a > 0$ *et soit* f *une fonction continue sur* $[-a, a]$.

(i) *Si* f *est paire, alors on a* $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2\int_0^a f(t)\, dt$.

(ii) *Si* f *est impaire, alors on a* $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$.

7.3 Intégration Par Parties

Théorème 7.2. *Soient* f *et* g *deux fonctions de classe* C^1 *sur* $[a, b]$. *Alors,*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\, dt = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\, dt.$$

Exercice 7.3. *Calculer* $\int_1^x \ln t \, dt$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}\int_1^x \ln t\,dt &= \int_1^x \ln t\,(t)'\,dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x (\ln t)'\ t\,dt\\ &= x\ln x - \int_1^x \frac{1}{t}\,t\,dt = x\ln x - \int_1^x dt\\ &= x\ln x - [t]_1^x = x\ln x - x + 1.\end{aligned}$$

7.4 Intégration des Fonctions Rationnelles

Pour intégrer une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes réels, on effectue la décomposition en fractions simples et puis on intègre chaque élément obtenu ; c'est à dire la partie entière, les éléments de première espèce et de seconde espèce suivants.

- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + cte, & \text{si } n \neq 1,\\ \ln|x-a| + cte, & \text{si } n = 1.\end{cases}$

- $\displaystyle\int \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^n}\,dx; \qquad b^2-4c<0.$

On écrit x^2+bx+c sous la forme $(x-p)^2+q^2$ $(q \neq 0)$ et on fait le changement de variable $x = p+qt$. On obtient

$$\int \frac{\beta x+\gamma}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \beta' \int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt + \gamma' \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt.$$

On pose $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$ et $J_n = \displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt$.

Calcul de J_n :

$$J_n = \int \frac{t}{(t^2+1)^n}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^n}\,dt = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)(t^2+1)^{n-1}} + cte, & \text{si } n \neq 1,\\ \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1) + cte, & \text{si } n = 1.\end{cases}$$

Calcul de I_n :

Pour $n=1$, $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan t + cte.$

Maintenant pour calculer I_{n+1}, il suffit de calculer I_n en utilisant une intégration par parties.

On a pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,(t)'\,dt \\
&= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt \\
&= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n \left(\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt - \int \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}\,dt \right) \\
&= \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right] + 2n \left(I_n - I_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Donc,

$$2nI_{n+1} = (2n-1)I_n + \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right].$$

Par suite,

$$\begin{cases} I_{n+1} = \dfrac{2n-1}{2n} I_n + \dfrac{1}{2n}\left[\dfrac{t}{(t^2+1)^n}\right], & n \geq 2, \\ I_1 = \arctan t + cte. \end{cases}$$

Exercice 7.4. *Calculer* $\int \frac{x^3+1}{x^2-x-2}\,dx$.

Solution : On a $deg(x^3+1) > deg(x^2-x-2)$.

On effectue la division euclidienne de x^3+1 par x^2-x-2, on obtient

$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x-2) + 3x + 3.$$

D'où

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = x + 1 + \frac{3x+3}{x^2-x-2}.$$

Comme le polynôme x^2-x-2 a deux racines -1 et 2, alors

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} = x+1+\frac{3x+3}{(x+1)(x-2)} = x+1+\frac{3}{x-2}.$$

Donc,

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-x-2}\,dx = \frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-2| + cte.$$

Exercice 7.5. *Calculer* $\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx$.

Solution : On a $deg(x-7) < deg(x^2+4x+13)^2$.

Le polynôme $x^2+4x+13$ n'a pas de racines réelles (car $\triangle < 0$).

On écrit $x^2+4x+13$ sous la forme $(x-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $x^2+4x+13 = (x+2)^2+9$.

On fait le changement de variable $x = 3t-2$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx &= \int \frac{x-7}{((x+2)^2+9)^2}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{t-3}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \frac{1}{9}\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt - \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt.\end{aligned}$$

On a

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{t^2+1}\right] + cte.$$

Maintenant, pour calculer $\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt$, on calcule $\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$ en utilisant une intégration par parties.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt &= \int \frac{1}{t^2+1}\,(t)'dt = \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^2}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \\ &= \left[\frac{t}{t^2+1}\right] + 2\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - 2\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t}{t^2+1}\right] + \frac{1}{2}[\arctan t] + cte.$$

On remplace t par $\frac{x+2}{3}$, on obtient

$$\int \frac{x-7}{(x^2+4x+13)^2}\,dx = \frac{-x-3}{2(x^2+4x+13)} - \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{x+2}{3}\right) + cte$$

7.5 Applications

Soit f une fonction rationnelle.

Les intégrales suivantes se ramènent aux intégrales des fonctions rationnelles.

$1-$**Intégrale de la forme** $\int f(e^x)\,dx$

On pose $t = e^x$, alors $x = \ln t$ et $dx = \frac{1}{t}\,dt$. On a donc,

$$\int f(e^x)\,dx = \int \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

$2-$**Intégrale de la forme** $\displaystyle\int f(\cos x)\sin x\,dx$

On pose $t=\cos x$, alors $x=\arccos t,\ dx=\dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\sin x=\sqrt{1-t^2}$. On a donc,

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx=-\int f(t)\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=-\int f(t)\,dt.$$

$3-$**Intégrale de la forme** $\displaystyle\int f(\sin x)\cos x\,dx$

On pose $t=\sin x$, alors $x=\arcsin t,\ dx=\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et $\cos x=\sqrt{1-t^2}$. On a donc,

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx=\int f(t)\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int f(t)\,dt.$$

$4-$**Intégrale de la forme** $\displaystyle\int f(\tan x)\,dx$

On pose $t=\tan x$, alors $x=\arctan t$, $dx=\dfrac{1}{1+t^2}\,dt$, $\sin x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. On a donc,

$$\int f(\tan x)\,dx=\int\frac{f(t)}{1+t^2}\,dt.$$

$5-$**Intégrale de la forme** $\displaystyle\int f(\sin x,\cos x)\,dx$ (f est une fonction de deux variables)

On pose $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, alors $x=2\arctan t,\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$, $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. On a donc,

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=2\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}.$$

Exercice 7.6. *Calculer* $\displaystyle\int\frac{dx}{2+\sin x}$.

Solution : On pose $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, alors $x=2\arctan t,\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt$ et $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$. On a donc,

$$\int\frac{dx}{2+\sin x}\,dx=\int\frac{dt}{t^2+t+1}.$$

On écrit le polynôme t^2+t+1 sous la forme $(t-p)^2+q^2$. Un simple calcul donne $t^2+t+1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$.
On fait le changement de variable $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}T-\dfrac{1}{2}$. Alors, $dt=\dfrac{\sqrt{3}}{2}dT$ et $T=\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\int\frac{dt}{t^2+t+1}&=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dT}{T^2+1}\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan T+cte\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+cte.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right) + cte.$$

Remarque 7.3. *On peut calculer aussi* $\int f(\sin x, \cos x)\, dx$ *en utilisant les changements suivants :*

- *On pose* $t = \cos x$ *si* $f(\sin x, \cos x)\, dx$ *est invariante en changeant* x *en* $-x$.
- *On pose* $t = \sin x$ *si* $f(\sin x, \cos x)\, dx$ *est invariante en changeant* x *en* $\pi - x$.
- *On pose* $t = \tan x$ *si* $f(\sin x, \cos x)\, dx$ *est invariante en changeant* x *en* $\pi + x$.

Exercice 7.7. *Calculer* $\int \cos^3 x\, dx$.

Solution : On a $\cos^3(\pi - x)\, d(\pi - x) = \cos^3 x\, dx$, ce qui veut dire que $\cos^3 x\, dx$ est invariante en changeant x en $\pi - x$.

On pose $t = \sin x$, alors $dt = \cos x\, dx$ et on a

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x\, dx \\ &= \int (1 - t^2)\, dt = t - \frac{t^3}{3} + cte \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + cte. \end{aligned}$$

Chapitre 3

Intégrales Généralisées

On s'intéresse dans ce chapitre à généraliser la notion d'intégrale d'une fonction définie sur l'un des intervalles suivants.

- $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.
- $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.
- $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

1 Définitions

Définition 1.1. *Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.*
On dit qur l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ existe et est finie.
Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$ *est appelée intégrale généralisée ou impropre de la fonction f sur $[a, b[$.*

Définition 1.2. *Soit f une fonction continue sur $]a, b]$.*
On dit qur l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt$ existe et est finie.

Définition 1.3. *Soit f une fonction continue sur $]a, b[$.*
On dit qur l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes pour tout $c \in]a, b[$.
On pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$.

Exercice 1.4. *Etudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$.

Solution : La fonction $t \to e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$, donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $x \in [0,+\infty[$, alors

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$.

Exercice 1.5. *Etudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$.

Solution : La fonction $t \to \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,1]$, donc le problème se pose uniquement en 0.

Soit $x \in]0,1]$, alors

$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{x\to0^+} 2 - 2\sqrt{x} = 2$, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Exercice 1.6. *Etudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Solution : La fonction $t \to \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$, donc le problème se pose en$-\infty$ et $+\infty$.

On a

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty}\int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to-\infty}[\arctan t]_x^0 = \frac{\pi}{2}.$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty}[\arctan t]_0^x = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ sont convergentes. Par suite, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

Remarque 1.1. *Dans le cas où $a = -\infty$ et $b = +\infty$, l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^x f(t)\,dt$ ne prouve pas la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$. Par exemple, il suffit de considérer une fonction impaire continue.*
On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge alors que $\displaystyle\int_{-x}^x t\,dt = 0$, pour tout $x > 0$.

Proposition 1.7. *Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec b fini.*

Si f est prolongeable par continuité en b, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

Remarque 1.2. *En posant $f(b) = \lim\limits_{x\to b} f(x) = l$ et désignant par F la primitive de f qui s'annule en a, la fonction F est continue en b et on a*

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x\to b} F(x) - F(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Dans ce cas, on dit q'il y a une fausse intégrale généralisée.

Remarque 1.3. *On a aussi $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente dans les deux cas suivants.*

- *f est continue sur $]a, b]$ (a fini) et prolongeable par continuité en a.*
- *f est continue sur $]a, b[$ (a et b sont finis) et prolongeable par continuité en a et b.*

Exercice 1.8. *Etudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,dt$.*

Solution : La fonction $x \to x\ln x$ est continue sur $]0, 1]$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, alors elle admet un prolongement par continuité en 0. Par suite, $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,dt$ est convergente, c'est à dire $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 t\ln t\,dt$ existe et est finie.

On a

$$\begin{aligned}\int_x^1 t\ln t\,dt &= \int_x^1 \left(\frac{t^2}{2}\right)'\ln t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}\,dt\\ &= -\frac{x^2}{2}\ln x - \int_x^1 \frac{t}{2}\,dt = -\frac{x^2}{2}\ln x - \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^1\\ &= -\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,dt = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 t\ln t\,dt = -\frac{1}{4}$.

2 Propriétés des Intégrales Généralisées

Proposition 2.1. *(Linéarité)*

Si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont convergentes, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,dt$, *où* $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, *est convergente et on a*

$$\int_a^b \Big(\alpha f(t) + \beta g(t)\Big)\, dt = \alpha \int_a^b f(t)\, dt + \beta \int_a^b g(t)\, dt.$$

Proposition 2.2. *(Relation de Chasles)*

L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\, dt$ *est convergente si et seulement si les intégrales* $\int_a^c f(t)\, dt$ *et* $\int_c^b f(t)\, dt$ *sont convergentes pour tout* $c \in]a, b[$ *et on a*

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt.$$

3 Calcul Pratique des Intégrales Généralisées

3.1 Utilisation des Primitives

Définition 3.1. *Soit* f *une fonction continue sur* $]a, b[$.

Si F *est une primitive de* f, $F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$, *pour* $a < c < b$, *alors l'intégrale* $\int_a^b f(t)\, dt$ *est convergente si et seulement si* $\lim\limits_{x \to a^+} F(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$ *existent.*

On définit alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b^-} F(x) - \lim_{x \to a^+} F(x).$$

3.2 Changement de Variable

Théorème 3.1. *Soient* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *continue et* $g :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ *une bijection de classe* C^1. *Alors,* $\int_a^b f(x)\, dx$ *est convergente si et seulement si* $\int_\alpha^\beta f\Big(g(t)\Big)\, g'(t)\, dt$ *est convergente et on a*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f\Big(g(t)\Big)\, g'(t)\, dt.$$

Exercice 3.2. *Calculer* $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Solution : On pose $t = \sin x$, alors $dt = \cos x\, dx$. La fonction $\sin : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to]-1, 1[$ est une bijection de classe C^1. Donc,

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}\, dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{|\cos x|}\, dx.$$

Comme la fonction $\cos$ est positive sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $|\cos x| = \cos x$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Par suite,

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \pi.$$

3.3 Intégration Par Parties

Théorème 3.2. *Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $]a, b[$.*

On suppose que $\lim_{x\to a^+} f(x)g(x) = L^+$ et $\lim_{x\to b^-} f(x)g(x) = L^-$ existent. Alors, $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx$ est convergente et on a

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = L^- - L^+ - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Exercice 3.3. *Calculer $\int_0^1 (\ln t)^2\,dt$.*

Solution : On a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln t)^2\,dt &= \int_0^1 (t)'(\ln t)^2\,dt = -\lim_{t\to 0^+} t(\ln t)^2 - \int_0^1 t\frac{2}{t}\ln t\,dt \\
&= -2\int_0^1 \ln t\,dt = -2\int_0^1 (t)'\ln t\,dt \\
&= 2\lim_{t\to 0^+} t\ln t + 2\int_0^1 t\frac{1}{t}\,dt = 2.
\end{aligned}$$

4 Intégrales Généralisées Des fonctions à Signe Constant

Il est facile de voir que la convergence de l'intégrale $-\int_a^b f(t)\,dt$ se ramène à celle de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$. Par conséquent, dans la suite on ne considère que le cas des fonctions positives.

4.1 Critère de la Convergence Majorée

Proposition 4.1. *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue et positive. Alors, $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement s'il existe $M \geq 0$ (M indépendante de x) tel que $\int_a^x f(t)\,dt \leq M$ pour tout $x \in [a, b[$.*

4.2 Critère de Comparaison

Proposition 4.2. *Soit $f,\ g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et positives.*

S'il existe $M > 0$ tel que $f(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in [a, b[$ et si $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

4.3 Critère d'Equivalence

Proposition 4.3. *Soit $f,\ g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et positives telles que $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$, alors on a*

(i) Si $l \neq 0$, $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente.

(ii) Si $l = 0$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

Remarque 4.1. *Si f est continue et positive sur $[a, +\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l > 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.*

4.4 Exemple Fondamental : Intégrales de Riemann

- $\int_0^1 \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.
- $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Exercice 4.4. *Eudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.*

Solution : On a pour tout $t \geq 1$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Comme $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ est convergente, alors d'après le critère de comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente.

D'autre part, comme la fonction $t \to e^{-t^2}$ est continue sur $[0, 1]$, alors $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ est une intégrale simple. On déduit que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est convergente car c'est la somme de deux intégrales convergentes.

Exercice 4.5. *Eudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$, $\alpha > 0$.*

Solution : La fonction $t \to t^{\alpha-1}e^{-t}$ n'est pas définie en 0 car $t^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln t}$.

On a $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{t^{\alpha-1}} = \lim\limits_{t\to 0} e^{-t} = 1$. Donc, $t^{\alpha-1}e^{-t} \sim t^{\alpha-1}$ au voisinage de 0.

Comme $\int_0^1 t^{\alpha-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t^{1-\alpha}}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente car $1-\alpha<1$, alors d'après le critère d'équivalence, l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$ est convergente.

5 Intégrales Absolument Convergentes

Définition 5.1. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue.*

On dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Théorème 5.1. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue.*

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Remarque 5.2. *La réciproque du théorème est fausse. Dans ce cas, une intégrale généralisée convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Exercice 5.2. *Eudier la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,dt$.*

Solution : On a pour tout $t \geq 1, \quad 0 \leq \left|\frac{\sin t}{t^3}\right| \leq \frac{1}{t^3}$.
Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ est une intégrale de Riemann convergente, alors $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t^3}\right|\,dt$ est convergente. Ce qui veut dire que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,dt$ est absolument convergente.

Proposition 5.3. *(Critère de Riemann)*

(i) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ telle que $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = k$ existe.*

- *Si $\alpha > 1$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente.*
- *Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente.*

(ii) *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur $]a,b]$ telle que $\lim_{x\to a^+} (x-a)^\alpha f(x) = k$ existe.*

- *Si $\alpha < 1$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente.*
- *Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est divergente.*

Exercice 5.4. *Etudier la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$.*

Solution : La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $[2,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2-1} = 1$. Donc, d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$ est absolument convergente. Par suite, $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$ est convergente.

Exercice 5.5. *Etudier la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2-1}$.

Solution : La fonction $x \to \dfrac{1}{x^2-1}$ est continue sur $]-1,0]$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x+1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-1}{2}$. Donc, d'après le critère de Riemann, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2-1}$ est divergente.

Chapitre 4

Equations Différentielles du Premier Ordre

1 Définition

Définition 1.1. *Soit ϕ une fonction de trois variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

On appelle équation différentielle du premier ordre, une relation de la forme $\phi(x, y, y') = 0$ faisant intervenir une variable x, une fonction $y = y(x)$ et sa dérivée $y'(x)$.

Une fonction f dérivable est dite solution de cette équation sur $I \subset \mathbb{R}$ si $\phi(x, f(x), f'(x)) = 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple 1.1. *L'équation $x^3y' - 2 = 0$ est une équation différentielle du premier ordre. Elle admet $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ comme solution sur $I = \mathbb{R}^*$.*

2 Equation à Variables Séparées

Définition 2.1. *L'équation différentielle du premier ordre à variables séparées est de la forme $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$.*

Méthode de Résolution : On a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \quad &\Rightarrow \quad g(y)\,dy = f(x)\,dx \\ &\Rightarrow \quad \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx. \end{aligned}$$

Le problème se ramène à deux intégrations.

Exercice 2.2. *Résoudre l'équation différentielle* $x\,y' - 2y = 0$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} x\,y' - 2y = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2}{x}dx \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad \ln|y| = 2\ln|x| + cte = \ln x^2 + cte \\ &\Rightarrow \quad |y| = e^{cte}x^2. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle $x\,y' - 2y = 0$ est $y = Cx^2;\ \ C \in \mathbb{R}$.

2.1 Cas Particulier : Equation Autonome

Définition 2.3. *L'équation autonome est un cas particulier d'équation séparable, elle est de la forme* $y' = g(y)$.

Méthode de Résolution : L'équation autonome est indépendante de x. On a alors,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = g(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = dx \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int dx = x + cte. \end{aligned}$$

Exercice 2.4. *Résoudre l'équation* $y' = y^2 + y$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} y' = y^2 + y \quad &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y^2 + y \Rightarrow \frac{dy}{y^2+y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2+y} = \int dx = x + cte \\ &\Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = x + cte \Rightarrow \ln|y| - \ln|y+1| = \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = x + cte \\ &\Rightarrow \quad \left|\frac{y}{y+1}\right| = e^{cte}\,e^x \Rightarrow \frac{y}{y+1} = \pm e^{cte}\,e^x \Rightarrow \frac{y}{y+1} = Ce^x;\ C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y = Ce^x(y+1) \Rightarrow (1 - Ce^x)y = Ce^x \Rightarrow y = \frac{Ce^x}{1 - Ce^x};\ \ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation différentielle $y' = y^2 + y$ est $y = \dfrac{C}{e^{-x} - C};\ \ C \in \mathbb{R}$.

3 Equation Homogène

Définition 3.1. *L'équation différentielle du premier ordre homogène est de la forme* $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Méthode de Résolution : On pose $u = \frac{y}{x}$; alors $y = u\,x$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u = f(u) \quad &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u \\ &\Rightarrow \quad \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}, \qquad \text{(séparation des variables)} \\ &\Rightarrow \quad \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + cte. \end{aligned}$$

On pose $g(u) = \int \frac{du}{f(u) - u}$, alors $\ln|x| = g(u) + cte$. Ceci donne $|x| = e^{cte}e^{g(u)}$. D'où, $x = Ce^{g(u)};\ C \in \mathbb{R}$.

Par conséquent, $y = u\,x = Cu\,e^{g(u)};\ C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.2. *Résoudre l'équation différentielle* $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Solution : L'équation différentielle $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ est une équation homogène de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(t) = \frac{t}{1 + t^2}$.

On pose $u = \frac{y}{x}$; alors $y = u\,x$ et $\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$. Par suite,

$$\begin{aligned} x\frac{du}{dx} + u = f(u) = \frac{u}{1 + u^2} \quad &\Rightarrow \quad x\frac{du}{dx} = f(u) - u = \frac{-u^3}{1 + u^2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{-(1 + u^2)}{u^3}du = \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad -\int \frac{(1 + u^2)}{u^3}\,du = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad -\int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{1}{2u^2} - \ln|u| + cte \Rightarrow |x| = \frac{e^{cte}}{|u|}e^{1/(2u^2)} \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{C}{u}e^{1/(2u^2)};\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ est :

$$y = u\,x = Ce^{1/(2u^2)} = Ce^{x^2/(2y^2)}.$$

C'est une forme implicite impossible à résoudre sous la forme $y = f(x)$.

4 Equation Linéaire

Définition 4.1. *L'équation différentielle du premier ordre linéaire est de la forme*

$$a(x)y' + b(x)y = f(x); \qquad (E).$$

avec $a(x)$, $b(x)$ *et* $f(x)$ *sont des fonctions continues sur un même ensemble.*

La fonction $f(x)$ *est appelée second membre de l'équation* (E).

L'équation sans second membre associée est :

$$a(x)y' + b(x)y = 0; \qquad (E_h).$$

Exemple 4.1. *On a*

(i) *L'équation* $x\,y' + (\cos x)y = 2x^2$ *est linéaire.*

(ii) *L'équation* $y'\,y + xy = 2x - 1$ *n'est pas linéaire.*

4.1 Equation Linéaire Sans Second Membre

On se propose de résoudre l'équation linéaire sans second membre

$$a(x)y' + b(x)y = 0; \qquad (E_h)$$

avec $a(x) \neq 0$.

Méthode de Résolution :

$$\begin{aligned} a(x)y' + b(x)y = 0 \quad &\Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{b(x)}{a(x)}\,y \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx \\ &\Rightarrow \quad \ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx + cte \end{aligned}$$

Soit $A(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx$. Alors, $\ln|y| = -A(x) + cte$. Donc, $|y| = e^{cte}e^{-A(x)}$ et par suite, $y = \pm e^{cte}e^{-A(x)}$.

Par conséquent, $y_h(x) = Ce^{-A(x)};\ C \in \mathbb{R}$ est la solution générale de l'équation sans second membre (E_h).

Remarque 4.1. *L'équation linéaire sans second membre est à variables séparées.*

4.2 Equation Linéaire Avec Second Membre

Théorème 4.2. *Soient y_h la solution générale de l'équation (E_h) et y_p une solution particulière de l'équation (E). Alors, la solution générale y de (E) est donnée par*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Maintenant, pour chercher une solution particulière de (E), on applique une méthode générale appelée méthode de la variation de la constante.

Méthode de la Variation de la Constante

Soit y_h la solution générale de l'équation sans second membre (E_h). Donc, $y_h(x) = Ce^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ et $A(x) = \int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx$.

La méthode de la variation de la constante consiste à remplacer la constante C par une fonction $C(x)$ et chercher une solution particulière de l'équation avec second membre (E) de la forme $y(x) = C(x)e^{-A(x)}$.

On calcule y', on remplace y et y' par leurs expressions dans l'équation (E) et on utilise le fait que $e^{-A(x)}$ est solution de (E_h), on trouve

$$C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)},$$

ce qui implique

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Donc, la solution générale de l'équation avec second membre (E) est

$$y(x) = C(x)e^{-A(x)} = e^{-A(x)} \int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx + ke^{-A(x)}, \quad k \in \mathbb{R},$$

c'est à dire $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ avec $y_h(x) = ke^{-A(x)};\ k \in \mathbb{R}$ est la solution générale de (E_h) et $y_p(x) = e^{-A(x)} \int \frac{f(x)}{a(x)}e^{A(x)}\, dx$ est une solution particulière de (E).

Exercice 4.2. *Résoudre l'équation linéaire* $(1+x^2)y' + xy = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Solution : On pose $a(x) = 1+x^2$, $b(x) = x$ et $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

La solution générale de l'équation sans second membre est $y_h(x) = ke^{-A(x)}$ où $A(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx$ et $k \in \mathbb{R}$.

On a

$$A(x) = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln(\sqrt{1+x^2}).$$

Donc,

$$y_h(x) = ke^{-A(x)} = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

La solution particulière de l'équation avec second membre est donnée par

$$\begin{aligned}
y_p(x) &= e^{-A(x)} \int \frac{f(x)}{a(x)} e^{A(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\sqrt{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{2} \int 2x(1+x^2)^{-3/2}\,dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Donc, la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{k}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{1+x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

5 Equation de Bernoulli

Définition 5.1. *L'équation de Bernoulli est une équation différentielle du premier ordre de la forme*

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)y^m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Méthode de Résolution : D'abord, on remarque que $y = 0$ est solution de l'équation Bernoulli.

Maintenant, pour chercher une solution générale non identiqument nulle y de l'équation de Bernoulli, on distingue deux cas.

- Si $m = 1$, l'équation devient $a(x)y' + \Big(b(x) - f(x)\Big)y = 0$.

  C'est une équation linéaire du premier ordre sans second membre dont la solution générale est

$$y(x) = Ce^{-B(x)}; \quad C \in \mathbb{R}.$$

  où

$$B(x) = \int \frac{b(x) - f(x)}{a(x)}\, dx.$$

- Si $m \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} a(x)y' + b(x)y = f(x)y^m \quad &\Rightarrow \quad a(x)y'y^{-m} + b(x)y^{1-m} = f(x) \\ &\Rightarrow \quad \frac{a(x)}{1-m}\left(y^{1-m}\right)' + b(x)y^{1-m} = f(x). \end{aligned}$$

  On pose $u = y^{1-m}$, alors l'équation devient

$$\frac{a(x)}{1-m}u' + b(x)u = f(x).$$

  On s'est ramené donc à une équation linéaire du premier ordre en u avec $u = y^{1-m}$.

Exercice 5.2. *Résoudre l'équation de Bernoulli* $xy' + y = x^2y^2$.

Solution : On a $y = 0$ est solution de l'équation de Bernoulli.

On cherche maintenant une autre solution non identiquement nulle. On a

$$\begin{aligned} xy' + y = x^2y^2 \quad &\Rightarrow \quad xy'y^{-2} + yy^{-2} = x^2 \\ &\Rightarrow \quad -x\left(\frac{1}{y}\right)' + \frac{1}{y} = x^2. \end{aligned}$$

On pose $u = \dfrac{1}{y}$; alors on se ramène à résoudre l'équation linéaire $-xu' + u = x^2$.

La solution générale de l'équation sans second membre $-xu' + u = 0$ est

$$u_h(x) = Ce^{\int \frac{1}{x}\,dx} = Ce^{\ln|x|} = C|x| = \pm Cx; \quad C \in \mathbb{R}.$$

Donc, $u_h(x) = kx; \quad k \in \mathbb{R}$.

La solution particulière de $-xu' + u = x^2$ est

$$u_p(x) = -e^{\int \frac{1}{x}\,dx} \int xe^{-\int \frac{1}{x}\,dx} = -e^{\ln|x|} \int \frac{x}{e^{\ln|x|}}\, dx = -|x| \int \frac{x}{|x|}\, dx = -|x|\,|x| = -x^2.$$

Donc, la solution générale de l'équation $-xu' + u = x^2$ est

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = kx - x^2; \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{kx - x^2}; \qquad k \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de l'équation de Bernoulli $xy' + y = x^2y^2$.

Chapitre 5

Equations Différentielles Linéaires du Second Ordre à Coefficients Constants

1 Définition

Définition 1.1. *Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme*

$$ay'' + by' + cy = f(x), \qquad (E)$$

avec a, b, c des réels et f une fonction de x.

L'équation sans second membre associée à l'équation (E) est

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad (E_h)$$

2 Résolution de l'Equation Sans Second Membre

Définition 2.1. *Deux fonctions y_1 et y_2 sont dites linéairement indépendantes si*

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Théorème 2.1. *L'équation sans second membre (E_h) possède deux solutions linéairement indépendantes y_1 et y_2.*

De plus, toute solution y de (E_h) est de la forme

$$y(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x); \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Méthode de Résolution : Pour résoudre l'équation sans second membre (E_h), on cherche une solution de la forme $y(x) = e^{\lambda x}$.

En remplaçant dans l'équation, on trouve l'équation caractéristique

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

La résolution de l'équation (E_h) dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. On a donc, les trois cas suivants.

Cas1 : $\Delta > 0$

L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $\lambda_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

La solution générale de l'équation (E_h) est

$$y_h(x) = C_1\, e^{\lambda_1 x} + C_2\, e^{\lambda_2 x}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Cas2 : $\Delta = 0$

L'équation caractéristique admet une racine réelle double $\lambda = \dfrac{-b}{2a}$.

La solution générale de l'équation (E_h) est

$$y_h(x) = e^{\lambda x}\Big(C_1 x + C_2\Big), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Cas3 : $\Delta < 0$

L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $\lambda_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\lambda_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

On pose $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, alors la solution générale de l'équation (E_h) est

$$y_h(x) = e^{\alpha x}\Big(C_1\, \cos(\beta x) + C_2\, \sin(\beta x)\Big), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On peut l'écrire sous la forme

$$y_h(x) = K e^{\alpha x} \cos(\beta x + C), \qquad K,\, C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.2. *Résoudre l'équation* $y'' + y' - 2y = 0.$

Solution : L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$

Comme $\Delta = 9 > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$. Donc, la solution générale est

$$y(x) = C_1\, e^{x} + C_2\, e^{-2x}, \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.3. *Résoudre l'équation* $y'' + 6y' + 9y = 0.$

Solution : L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0.$

Comme $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique admet une racine réelle double $\lambda = -3$. Donc, la solution générale est

$$y(x) = e^{-3x}\Big(C_1\, x + C_2\Big), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.4. *Résoudre l'équation* $y'' + 2y' + 2y = 0.$

Solution : L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$

Comme $\Delta = -4 < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, $\lambda_1 = -1+i$ et $\lambda_2 = -1 - i$. Donc, la solution générale est

$$y(x) = e^{-x}\Big(C_1\, \cos x + C_2\, \sin x\Big), \qquad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3 Résolution de l'Equation Avec Second Membre

Théorème 3.1. *Soient y_h la solution générale de l'équation sans second membre (E_h) et y_p une solution particulière de l'équation (E). Alors, la solution générale y de (E) est donnée par*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

3.1 Solution Particulière de L'Equation Avec Second Membre

Formes Classiques du Second Membre

On va présenter trois formes classiques du second membre.

$1-$ Equation de la forme $ay'' + by' + cy = P_n(x)\,;\quad P_n$ un polynôme de degré n.

On cherche une solution particulière y_p telle que

$$y_p(x) = \begin{cases} Q_n(x), & \text{si } c \neq 0, \\ x\, Q_n(x), & \text{si } c = 0 \text{ et } b \neq 0, \\ x^2\, Q_n(x), & \text{si } c = b = 0. \end{cases}$$

avec Q_n un polynôme de degré n.

2− Equation de la forme $ay'' + by' + cy = e^{mx}\, P_n(x)\,;\quad P_n$ un polynôme de degré n et $m \in \mathbb{R}^*$.

On cherche une solution particulière y_p telle que

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{mx}\, Q_n(x), & \text{si } m \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique,} \\ e^{mx}\, x\, Q_n(x), & \text{si } m \text{ est racine simple de l'équation caractéristique,} \\ e^{mx}\, x^2\, Q_n(x), & \text{si } m \text{ est racine double de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

avec Q_n un polynôme de degré n.

3− Equation de la forme $ay'' + by' + cy = e^{mx}\Big(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\Big)\,;\quad \omega \neq 0.$

On cherche une solution particulière y_p telle que

$$y_p(x) = \begin{cases} e^{mx}\Big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\Big), & \text{si } m + i\omega \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique,} \\ x\, e^{mx}\Big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\Big), & \text{si } m + i\omega \text{ est racine de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

On calcule les deux réels A et B en remplaçant l'expression de y_p dans l'équation.

Exercice 3.1. *Résoudre l'équation* $y'' - 4y = x\, e^{2x}$.

Solution : On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' - 4y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 4 = 0$. Elle admet deux racines réelles $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -2$.

Donc, la solution générale de l'équation $y'' - 4y = 0$, est

$$y_h(x) = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^{-2x} : \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' - 4y = x\, e^{2x}$ est de la forme $e^{mx}\, P_n(x)$ avec $m = 2$ et $n = 1$.

comme 2 est racine simple de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^{2x}\, x\,(ax + b)$. C'est à dire $y_p(x) = e^{2x}\,\big(ax^2 + bx\big)$.

On pose $u(x) = ax^2 + bx$. Alors, $y_p(x) = e^{2x}\, u(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' - 4y = x\, e^{2x}$, on trouve

$$8ax + 2a + 4b = x.$$

D'où, $a = \dfrac{1}{8}$ et $b = \dfrac{-1}{16}$.

Donc, la solution particulière est

$$y_p(x) = e^{2x}\left(\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16}\right).$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' - 4y = x\,e^{2x}$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} + C_1\right)e^{2x} + C_2\,e^{-2x} : \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3.2. *Résoudre l'équation* $y'' + 9y = e^x\ \cos x$*.*

Solution : On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + 9y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 9 = 0$. Elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = 3i$ et $\lambda_2 = -3i$.

Donc, la solution générale de l'équation $y'' + 9y = 0$, est

$$y_h(x) = C_1\ \cos(3x) + C_2\ \sin(3x); \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Le second membre de l'équation $y'' + 9y = e^x\ \cos x$ est de la forme $e^{mx}\Big(\alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)\Big)$ avec $m = 1$ et $\omega = 1$.

comme $1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = e^x\Big(A\cos x + B\sin x\Big)$.

On pose $z(x) = A\cos x + B\sin x$. Alors, $y_p(x) = e^x\,z(x)$.

On calcule $y_p'(x)$ et $y_p''(x)$ et on remplace dans l'équation $y'' + 9y = e^x\ \cos x$, on trouve

$$\Big(2B + 9A - 1\Big)\cos x + \Big(9B - 2A\Big)\sin x = 0.$$

Ceci implique en utilisant le fait que les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, que $A = \dfrac{9}{85}$ et $B = \dfrac{2}{85}$.

Donc, la solution particulière est

$$y_p(x) = e^x\,z(x) = e^x\left(\frac{9}{85}\cos x + \frac{2}{85}\sin x\right)$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation $y'' + 9y = e^x \cos x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x) + e^x \left(\frac{9}{85} \cos x + \frac{2}{85} \sin x \right); \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Principe de Superposition

Si le second membre de l'équation (E) est de la forme $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, on cherche une solution particulière $y_{P_i}(x)$ de l'équation

$$ay'' + by' + cy = f_i(x); \qquad (E_i).$$

Une solution particulière $y_p(x)$ de (E) est alors donnée par

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) + \cdots + y_{p_n}(x).$$

Remarque 3.2. *Lorsque le second membre n'est pas l'une des formes indiquées précédemment, on cherche une solution particulière de (E) en utilisant la méthode de variation des constantes.*

Méthode de Variation des Constantes

Soit y_h la solution générale de l'équation sans second membre (E_h). Donc, $y_h(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x)$, où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de (E_h).

la méthode de variation des constantes consiste à remplacer les deux constantes C_1 et C_2 par des fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ et chercher une solution particulière de (E) de la forme

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x).$$

On impose de plus la condition suivante

$$C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0.$$

Ce qui donne

$$y'(x) = C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x).$$

On calcule ensuite y'', on remplace dans l'équation (E) et on utilise le fait que y_1 et y_2 sont deux solutions de l'équation (E_h). On trouve

$$C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = \frac{f(x)}{a}.$$

Il faut donc résoudre le système suivant dont les inconnus sont $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$.

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1(x) + C_2'(x)\,y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\,y_1'(x) + C_2'(x)\,y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Comme y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, alors le déterminant

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

Les deux solutions du système sont

$$C_1'(x) = \frac{-f(x)\,y_2(x)}{aW},$$

et

$$C_2'(x) = \frac{f(x)\,y_1(x)}{aW}.$$

On obtient donc les fonctions C_1 et C_2 en intégrant C_1' et C_2'.

Par suite, la solution particulière de (E) est

$$y_p(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x).$$

Exercice 3.3. *Résoudre l'équation* $y'' + y = \sin x$.

Solution : On commence par résoudre l'équation sans second membre $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 1 = 0$. Elle admet deux racines complexes $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

Donc, la solution générale de l'équation $y'' + y = 0$, est

$$y_h(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x; \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Comme les deux fonctions $\cos x$ et $\sin x$ sont linéairement indépendantes, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.

On résoud le système

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \sin x \end{cases}$$

Les deux solutions du système sont

$$C_1'(x) = \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = -\sin^2 x,$$

et

$$C_2'(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin x \cos x.$$

Donc,

$$C_1(x) = \int -\sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int \Big(\cos(2x) - 1\Big)\, dx = \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{x}{2},$$

et

$$C_2(x) = \int \sin x \cos x\, dx = \frac{\sin^2 x}{2}.$$

Un simple calcul donne

$$y_p(x) = C_1(x)\ \cos x + C_2(x)\ \sin x = \frac{\sin(x)}{2} - \frac{x\cos x}{2}.$$

Par suite, la solution générale de l'équation $y'' + y = \sin x$ est

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = k_1 \cos x + \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)\sin x - \frac{x\cos x}{2}; \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$y(x) = k_1 \cos x + K \sin x - \frac{x\cos x}{2}; \qquad k_1, K \in \mathbb{R}.$$

Bibliographie

[1] M. Andler, J.D. Bloch et B. Mailliard, Analyse II, Suites et Séries Numériques, Edition Marketing.

[2] A. Awan et B. Radi, Mathématiques, Analyse, Cours et Exercices Résolus, Afrique Orient.

[3] B. Calvo, Exercices d'Analyse $1^{ère}$ année, Armand Colin, collection U.

[4] B. Calvo, Exercices d'Analyse $2^{ème}$ année, Armand Colin, collection U.

[5] C. Deschamps, J. Odoux et E. Ramis, Cours de Mathématiques spéciales, Tome II, Dunod.

[6] J. Genet, G. Pupion, Analyse Moderne 2, Résumé de cours et Exercices Corrigés, Vuibert.

[7] J.M. Monier, Analyse II, $1^{ère}$ année MPSI, PCSI, PTSI, Dunod.

[8] J.M. Monier, Cours de Mathématiques, Analyse MPSI, Cours et Exercices Corrigés, Dunod.

[9] J.M. Monier, Mathématiques, Analyse III, Dunod.

[10] F. Précastaing, J. Sevin, Chemins vers l'Analyse Tome 2, Vuibert.

[11] J.P. Ramis, Mathématiques, tout en un pour la licence, Dunod.